2.2 Operações com Acontecimentos e Leis de De Morgan

2.2.1 Operações com acontecimentos

Situação 2

Seis amigos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* encontraram-se para conversarem sobre as férias do último ano. Chegaram à seguinte conclusão:

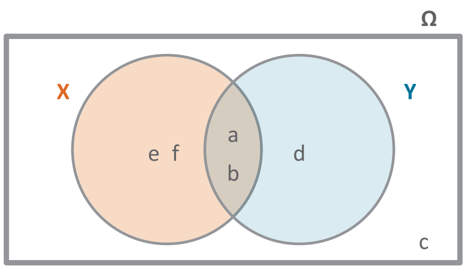
- *a*, *b*, *e*, *f* visitaram o país X;
- *a* , *b* visitaram o país Y;
- *d* visitou apenas o país Y;
- *c* não visitou nenhum destes países.

Consideremos a experiência aleatória que consiste em escolher um destes amigos ao acaso e registar o país (ou países) que visitaram.

Organizemos a informação num diagrama de Venn, onde está representado o espaço de resultados Ω, e os acontecimentos:

Acontecimento *X*: "visitar o país X";

Acontecimento *Y*: "visitar o país Y".

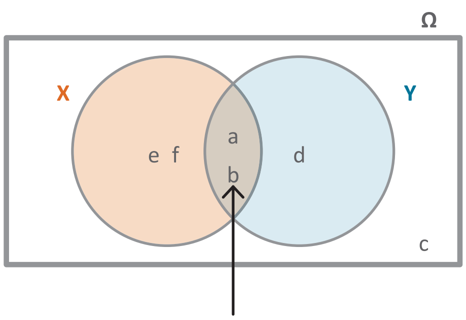


1. Define em extensão os acontecimentos:

a) Acontecimento *C*: "visitar o país X **e** o país Y"

Os amigos *a*, *b* visitaram os países X e Y.

$C = X \cap Y = \{a, b\}$; Lê-se "X **interseção** com Y".



Genericamente, o acontecimento interseção pode definir-se da seguinte forma:

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$, com $x \in \Omega$ (lê-se, *x* pertence ao espaço de resultados, tal que *x* pertence ao conjunto *A* e *x* pertence ao conjunto *B*).

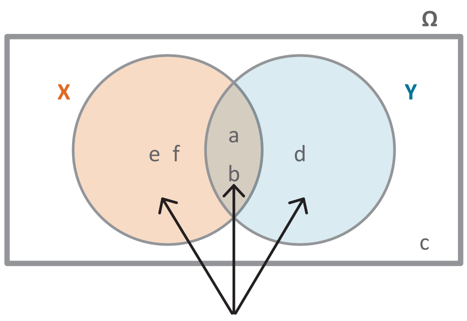
b) Acontecimento *D*: “visitar o país *X* **ou** o país *Y*”;

Este acontecimento realiza-se se ocorrer pelo menos um dos acontecimentos *X* ou *Y* .

Os amigos *a*, *b*, *d*, *e*, *f* visitaram o país X ou Y.

$D = X \cup Y = \{a, b, c, d, e, f\}$

Lê-se “X **união** com Y”.



Genericamente, o acontecimento união pode definir-se da seguinte forma:

$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ (lê-se, *x* pertence ao espaço de resultados, tal que *x* pertence ao conjunto *A* ou *x* pertence ao conjunto *B*).

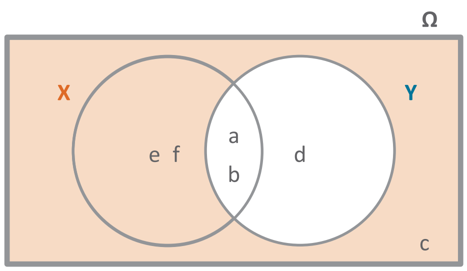
c) Acontecimento *E*: “não visitar o país *Y*”;

Este acontecimento é constituído por todos os elementos de Ω que não pertencem a *Y*.

Os amigos *c*, *e*, *f* não visitaram o país *Y*.

Lê-se: “acontecimento **contrário** ou complementar de *Y* ” e representa-se por $\overline{Y}$.

$E = \overline{Y} = \{c, e, f\}$



Genericamente, o acontecimento contrário ao acontecimento *A* pode definir-se da seguinte forma:

$\overline{A} = \{x : x \notin A\}$.

Da visualização deste diagrama de Venn podemos concluir que:

$A \cup \overline{A} = \Omega \rightarrow$ A união de um acontecimento com o seu contrário é igual ao espaço de resultados.

$A \cap \overline{A} = \{\ \} \rightarrow$ A interseção de um acontecimento com o seu contrário é igual ao conjunto vazio.

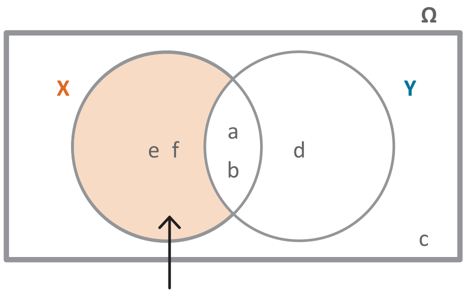
$\overline{\overline{A}} = A \rightarrow$ O contrário do contrário de um acontecimento é igual ao próprio acontecimento.

d) Acontecimento *F*: “visitar o país *X* mas não visitar o país *Y*”.

Este acontecimento é constituído por todos os elementos de *Ω* que pertencem a *X* mas não pertencem a *Y*.

Os amigos e, f visitaram o país X, mas não visitaram o país Y.

Lê-se "acontecimento **diferença** entre X e Y" e representa-se por $X - Y$.



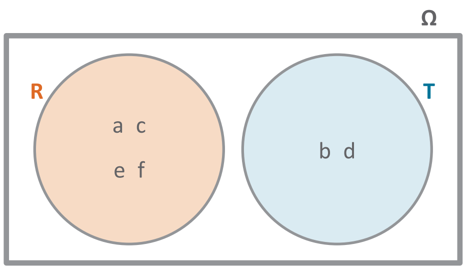
Genericamente, o acontecimento diferença pode definir-se da seguinte forma:

$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

2. Representa o novo espaço de resultados sabendo que os amigos a, c, e, f visitarem o país R e os amigos b, d visitaram o país T.

Os amigos que visitaram o país R não visitaram o país T e os amigos que visitaram o país T não visitaram o país R.

Os acontecimentos R e T dizem-se **disjuntos** porque não têm resultados comuns.



Genericamente, quando $A \cap B = \emptyset$ (ou $A \cap B = \{\}$), os acontecimentos A e B dizem-se **disjuntos**.

2.2.2 Leis de De Morgan

Sejam A e B dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória.

Contrário da união de dois acontecimento A e B:

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \rightarrow$ Não se realizar pelo menos um dos dois acontecimentos é equivalente a não se realizar nem um nem outro acontecimento.

Contrário da interseção de dois acontecimento A e B:

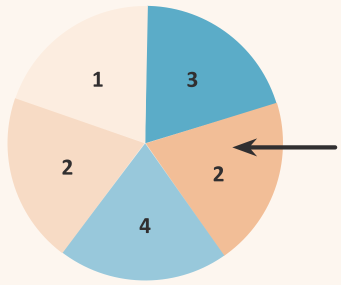
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \rightarrow$ Não se realizarem os dois acontecimentos simultaneamente é equivalente a pelo menos um dos dois acontecimentos não se realizar.

Tarefa 1

1. Oberva a roleta da sorte representada na figura e considera a experiência aleatória que consiste em rodar o ponteiro e anotar o número que sai.

1.1. Define o espaço de resultados.

1.2. Define e classifica cada um dos acontecimentos:



A: "sair múltiplo de 2";

B: "sair múltiplo de 5";

C: "sair número primo superior a 2";

D: "sair número inferior ou igual a 7".

2. Seja $\Omega = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ o espaço de resultados de uma experiência aleatória. Considera os seguintes acontecimentos associados a esta experiência aleatória $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{0, 2, 6, 10, 14\}$.

Determina:

2.1. $A \cap B$; **2.2.** $A \cup B$; **2.3.** $\overline{A \cap B}$; **2.4.** $\overline{A \cup B}$.

2.3 Aproximações concetuais para a probabilidade

2.3.1 Aproximação frequencista de probabilidade

Situação 3

Um professor pediu a cada um dos seus 25 alunos que lançasse ao ar uma moeda primeiro 4 vezes, depois 20 vezes, depois 40 vezes e, por último 80 vezes. Os resultados foram registados na seguinte tabela:

Lançamentos	Frequência absoluta da face anverso	Frequência relativa da face anverso
$25 \times 4 = 100$	38	$\frac{38}{100} = 0{,}38$
$25 \times 20 = 500$	220	$\frac{220}{500} = 0{,}44$
$25 \times 40 = 1000$	521	$\frac{521}{1000} = 0{,}521$
$25 \times 80 = 2000$	998	$\frac{998}{2000} = 0{,}499$

A frequência relativa da face anverso tende a estabilizar à volta do valor 0,50 à medida que o número de experiências aumenta. Neste caso, dizemos que a probabilidade de ocorrer o acontecimento "sair face anverso no lançamento de uma moeda" é 0,50 ou 50%.

Este método de cálculo de uma probabilidade só é possível quando são realizadas muitas experiências.